教育実践学研究第4号　２０００．３

数学的な考え方を育てる問題解決の指導

茨城大学大学院教育学研究科
水戸市立第一中学校

小池　浩一

本論は，数学教育の在り方について考察することをねらいとする。特に，数学的な考え方とはどのようなものかを明らかにし，数学的な考え方を育てる指導はどのようにすればよいのかを究明するものである。それは，従来型の知識を伝達する授業から，子供が自ら学び自ら問題を解決する学習への転換を目指すものである。

キーワード：数学的な考え方（mathematical thinking），数理化（mathematization），数学的活動（mathematical activities），メビウスの帯（Mőbius Band）

1　教育改革と生きる力の育成

(1)　生きる力の育成

新学習指導要領（平成10年12月）は，平成14年度から実施される完全週５日制の下で，各学校がゆとりの中で特色ある教育を展開し，子供に豊かな人間性や基礎・基本を身に付け，個性を生かし，自ら学び自ら考える力などの［生きる力］を培うことを基本的なねらいとして改訂された[1]。

この「生きる力（*zest for living*）」[2]は，第15期中央教育審議会の答申で明らかにされたものである。zestには，「強い興味，熱情，心からの楽しみ」という意味があり，「生きる力」は，生へのあくなき熱情，強い意欲を表していると考えられる。

これまで，日本は，よいモデルを導入し効率的に知識を吸収し改善をすることで経済的成功を収めた。ところが，社会が成熟し，物質的に豊かになった現在，学ぶ目標を見いだせない，ねばり強く考えられない，自己決定をすることができない子供達の実態が明らかとなってきている。21世紀は「智恵の時代」と言われている。この新しい時代を力強く生き抜くためには，自ら学び自ら考える力が是非とも必要になる。

(2)　基礎・基本の定着と授業の質的な改善

新学習指導要領は，内容の３割削減により，戦後を通して最低水準になった。内容が削減され論理が飛躍した部分を教師が補いながら指導しなければ学力の低下はまぬがれない。そうならないためにも，これまで以上に，授業の在り方が問われる時代になった。

かつて，アメリカでは，文字が読めないほどの学力低下と荒れる公立学校の問題がおき，教育改革に本腰を入れた。それを象徴するのが，教育改革案『危機に立つ国家』[3]（Nation at Risk, 1983）である。アドラー（Adler, M. J.）は，あらゆる人に同じ教育を与えるという提案をし[4]，ハーシュ

(Hirsch, E. D.)は，アメリカのすべての若者は国民的教養ともいうべき文化的リテラシーを共有すべきであるという見解を示した[5]。これらは，当時の日本をモデルにした教育改革ということができる。日本は識字率，数学的資質において抜群の水準を誇っていた。

アメリカでは，現在，母国語と数学を重視するカリキュラム改正を目玉に教育改革を進めているが，今回の日本の教育改革は，これとは逆のベクトルを示しており，かつてのアメリカ型に近い。新学習指導要領の特徴は，内容の厳選と選択幅の拡大である。これは，誰もが必ず身に付けるべき基礎・基本の徹底と個性化への対応をねらったものである。基礎・基本の徹底という言葉からは，教え込みやドリルによる訓練がイメージされるが，ここでいう基礎・基本には，学ぶ意欲や学び方が含まれるものであるというように捉えたい。子供が学ぶ意義を感じ自ら学び続ける意欲を高めるような指導ができるよう，授業の質的改善をこれまで以上に心がけなければならない。

2　数学教育の現状と課題

(1)　数学嫌いと考える力の育成

第３回ＩＥＡの国際調査の結果をみると，認知的成績は世界のトップであるが，数学嫌いなど情意的な面での課題が明確になった[6]。

数学の特質として，抽象性，形式性，累積性，論理性があげられる。これらの特質は数学的思考の本質であるが，これが逆に作用していると考えられる。映像文化に慣れきっている子供達にとっては，数学が本来内包しているこのような性格には容易になじめないのかもしれない。また，授業時数が少ないにもかかわらず成績が上位ということを考えると，知識の詰め込みが行われ，授業が楽しくないという意識が生まれていることが懸念される。

数学を学ぶ意義を感じられるような授業を創造すると同時に，日本の将来の豊かさを保障する技術および諸科学の基礎として，また，考える力，問題解決力，人間らしく生きる力を育てる教科として数学の授業を一層充実させなければならない。

(2)　創造的分野としての数学

ニュートン（Newton, I.）が，落ちるリンゴを見て引力の法則を発見したというエピソードは有名である。さらに彼は，地球の引力とは限定しないで，２つの物体間の引力に対しても成り立つことを導き，万有引力の法則に拡張した。ニュートンの功績は，自然現象を数学の形に変え，この数学を解くことによって，自然現象を解明するという方法を樹立したことである。これにより，既知のさまざまな現象を整理し理解できるようになっただけでなく，未知の現象を解明することにもなった。天王星などの新しい惑星の発見や電磁波の理論的な発見などがそれを示している[7]。

数学は，現在でも新しい事実が発見され，日々進歩している。コンピュータの進歩により，四色問題などの難問が解け，カオスやフラクタルといった新しい分野の数学が生まれている。それとは逆に，数学的アルゴリズムの発展により，コンピュータの演算速度が劇的に改善されている。私達の身の回りには，数学的事象があたかも空気のように存在しその恩恵を受けているのである。

モリス・クライン（Kline, M.）は，数学の20世紀的捉え方，本質について，「①仮説的思考　②創造的な分野　③記号的言語　④知識の体系　⑤合理的精神」と指摘している[8]。

数学は，実用的，科学的，美的，哲学的関心のすべてが集って形作られるものであり，「生きる力」の形成に数学教育は大きく貢献できるのではないかと考える。

(3) 数学指導の質的向上

これまでの数学の授業は，知識の伝達や計算技能の訓練が中心であったという反省に立ち，数学を学ぶ楽しさや意義を感じることができるような数学の学習になるように，指導の質的改善を図らなければならない。

佐藤瑛一氏は，学習内容をよりよく理解するために，また，数学の有用性，重要性を認識させる上からも，既習事項の活用が大切であると述べている[9]。自分の知っていること，持ち前のもので何とか解決できたという成功感，成就感を感得させることは，学習意欲の向上にもつながる。

古藤怜氏は，Do Math. の指導を主張し，内容を一方的に伝達するお下げ渡しの指導から，子供が自ら数学を創っていく学習への転換を強調し，表１のように指導観をまとめている[10]。

	今までの指導	これからの指導
①	教師が主役，生徒が聞き役 お下げ渡し的一斉指導	生徒が主役，教師が聞き役 協同学習，コミュニケーション
②	個に応ずる指導 習熟度別，T.T.	個を生かす指導 個性尊重，表現力の育成
③	教師が解決を提示する 教科書の体系・順序尊重	生徒と一緒に問題をつくる 問題設定の学習
④	解決方法はただ一通り 精選された体系を重視する	多様な考え方の尊重 一人ひとりの考えを大切にする
⑤	結果としての答えの重視 閉鎖的・形式的訓練	過程，及びその発展の重視 開放的・創造的活動

表１　Do Math の見地からの対比（古藤怜 1997）

特に数学科においては，自ら学び自ら考える力の育成に力を入れなければならない。なぜなら，自ら考え，自ら問題を解かなければ数学を理解することはできないからである。

それは，これまでの知識を伝達するという授業観から，体験的な学習や問題解決的な学習の充実を図る学習観への転換である。フロイデンタール（Freudenthal, H.）が，「人間が学ばなくてはならないことは，閉じた体系としての数学ではなく，むしろ，活動としての数学，すなわち実在を数学化(*mathematizing*)する過程や，できるなら，数学を数学化する過程である。」[11]と述べているように，子供が創っていく数学の授業を目指すものである。

3　数学的な考え方を育てる問題解決の指導

(1) 新学習指導要領における「数学的活動」の重視

新学習指導要領において，中学校数学科の目標は次のように改訂された[12]。

> 数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，<u>数学的活動の楽しさ</u>，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。

ここでは，「数学的活動の楽しさ」という文言が新たに入った。根本博氏は，楽しさを考える上で，数学的活動の楽しさであることを強調する。そして，数学的活動（*mathematics behavior activities*）は，身の回りに起こる事象や出来事を数理的に考察する活動と幅広くとらえ，活動には，外的（*physical*）活動と内的（*mental*）活動の両面があり，特に，一般化や概念の統合，拡張を伴う数学学習では，内面の行為（*mental behavior*）の活性化が一層重要であると述べている[13]。

思考は活動を通して身に付けられる。しかし，単に活動していればよいということではない。かつて活動主義が陥った過ち，すなわち，高久清吉氏の指摘する「はい回る経験主義」の誤り[14]を反省し，学習活動の質的な向上や深化を一貫して追究することに留意しなければならない。

時数削減という枠組みの中で，学力の低下を防ぎ，数学教育を改善・発展させる方策を探った結果，「数学的活動」を重視する方針が立てられたのである。

(2) 数学的な考え方

「学び方，考える力」は，算数・数学教育において連綿たる強調事項であった。教科教育においては，流行を取り入れるだけでなく，不易なるものを見定め，その実現を志すことが必要である。

昭和10年（1935）から学年進行の形で発行された国定教科書「尋常小学算術」（緑表紙教科書）では“数理思想の涵養”ということが強調された。この教科書は，20世紀初頭の欧米を中心とする数学教育改良運動の精神を反映したものである。緑表紙教科書編纂の責任者であった塩野直道氏は，「数理を愛し，数理を追究把握して喜びを感ずる心を基調とし，事象の中に数理を見出し，事象を数理的に考察し，数理的な行動をしようとする精神的態度」[15]を表現する言葉として数理を捉えている。この「数理思想」は，昭和11年（1936）にオスローで開かれた万国数学教科調査委員会には，「數理思想を開發（*fostering children's ideas on mathematical principles*）」[16]「兒童が解決（*spontaneous solution of children*）」[17]というように英訳され報告されている。これは，数学的な原理に基づく子供達のもつアイディアが数理思想の中核であり，子供自ずからなる着想に基づいての問題解決ということができる。

戦後日本では，C. I. E.（教育及び民間情報局）の指導により，算数・数学の指導内容は，戦前より１～２学年分のレベルダウンを余儀なくされた。事実，学力の低下が問題となり，科学振興の必要性から，昭和33年の学習指導要領では，系統性を重視したものとなり，昭和43年の改訂では，現代数学の特徴である集合や関数や構造などの基本的な概念によって，統合された数学を学ばせることをねらいとした。これらの改訂担当責任者であった中島健三氏は，数学的な考え方の育成について「算数・数学としてふさわしい創造的な活動（問題解決）が自主的にできる能力・態度」[18]を子供に身に付けさせたいとしている。

和田義信氏は，数学的な考え方を「①数学的なアイデア（*Mathematical Ideas*），②数学的な方法（*Mathematical Methods*），③数学教育のねらい」と分類整理している[19]。片桐重男氏は，和田氏の分類が妥当なものと考え，この三つの観点に基づいて，それぞれの中味となる考え方，態度の特徴を細かく調べ，包括的にあげている[20]。

数学的な考え方は，「数学」をうみ，それを発展させる原動力であり，そして，数学は，数学の内部だけに限らず，まったく別のところからもどんどんうまれでるものである[21]。いつの時代でも，どこでも役立つもの，数学の本質的な部分，それが数学的な考え方である。事象を観る眼や論理的にねばり強く考える力を育てることは必須の課題であり，それは数学教育によって達成できるものであると考える。

(3) 問題解決の指導

アメリカにおいては，1980年代からその指導理念を“Problem Solving”において現在に続いている。NCTM（全米数学教師協会）の80年報では，ポリア（Polya, G.）の問題解決過程を取り上げている[22]。ポリアは，著書『How to Solve it』において問題解決過程を「(ⅰ)問題の理解　(ⅱ)計画の立案（ⅲ)計画の実行（ⅳ)振り返り」の４段階で表しており[23]，一般的な問題解決において，このモデルは非常に参考になると考える。

わが国においても，子供の知離れを改善するために，選択学習や課題学習を導入し，数学を学ぶ

楽しさを味わえるような指導が強調されている。これは，教師が細切れになった数学の断片を解説するという授業ではなく，子供が自分の課題をもち，解法を考え，自ら問題を解決していく授業である。この場合，教師から与えられた問題を理解し解くというのではなく，問題自体も子供が見つけるというような学習が期待される。その際，ポリアの『帰納と類比』という著書にあるインダクション（*Induction*）[24]が参考になる。

三輪辰郎氏は，数学的問題解決のモデルを図１のように表している[25]。これまでの指導では，方程式を解くなどの数学的作業の部分を強調してきた。創る数学では，定式化の部分も大事に扱いたい。定式化は，実世界から問題の本質を抽出するところであり，観察・実験や試行錯誤をして考えるなど最もアイディアを使う部分である。ここには，単純化や理想化，仮説の設定，記号化や形式化という数学的な考え方が使われる。創る数学では，観察・実験を通して事象の中に潜む原理を発見して定式化し，数学的モデルを解くことによって数学的結論を得，それを現実の世界に適応して解釈・評価するサイクルをとる。

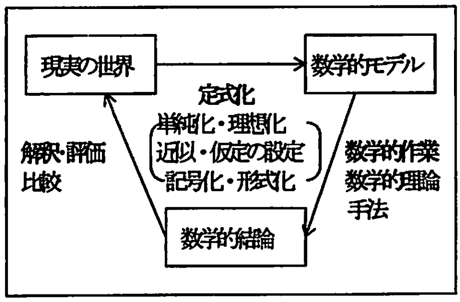


図１　数学的モデル化過程（三輪辰郎 1983）

また，問題解決においては，教材の在り方も大事なポイントである。

ハルモス（Halmos, P. R.）は，「問題は数学の真髄である」[26]と述べ問題の重要性を指摘している。また，ヒルベルト(Hilbert, D.)は，「数学には問題は測り知れないほどある。そして一つの問題が解けたとき，そこから限りない新しい問題が現れる」[27]と述べている。つまり，問題が解けたときは，単に一定の結果（答え）を得ただけでなくて，重要なことはそれによって新しいいくつかの問題がつくられることである。このように「問いが問いを呼ぶ」という開かれた学びが子供一人一人に成立するような問題解決となるように，教材の吟味と指導の在り方を工夫する必要がある。

(4)　指導と評価の一体化

数学的な考え方は，問題解決の過程を通して身に付く。子供は，問題解決をしながら，数学的なアイディアや筋道を立てて考えることを学ぶ。そういう思考活動を通して，事象に対する多様な見方や柔軟な考え方，そして新しいものを生み出そうとする態度が育成される。

数学的な考え方を育成する場合，数学的な考え方が，問題解決過程のどこでどのように現れるか，また使われるかに目を向けさせることが大事である。現在では，子供の主体的な学びを強調することから，「支援」という言葉を使うことが多い。指導者が子供の知識の構成活動を支えようとする上で，この言葉を使うことには意義を感じる。しかし，だからといって，「支援」は子供に好きにさせることと同義ではない。子供が自ら学び，自ら考えるようにするためには，きめ細かな指導が必要である。学習の目的をおさえ，子供の実態に応じて指導しなければならない。そして，その実態を知る手だてが「評価」である。ここでいう「評価」は，テストをして○×をつけ数値化するという意味ではなく，教師が一方的に教え，「分かりましたか」と確認することでもない。「まず教師がしなければならないことは，教師がどのように考えているかを子供に理解させることではなく，むしろ，子供がどのように考えているかを理解しようと試みること」[28]であり，指導に生かす評価である。つまり，子供の思考過程をみとり，適切に助言・支援すること，すなわち，指導と評価の一体化を図らなければならない。

熟練の教師（*Creative Teacher*）は，単なる質問であっても，それを価値ある問題解決の経験として利用するし，未熟な教師は，よい問題であっても単なる質問にしてしまう[29]。教師は，問題構成力や発問構成などに十分留意して指導に当たらなければならない。教師と子供，子供同士の人間関係をも含む総合的な学びを構成することが大事である。

4　メビウスの帯の教材化

(1)　メビウスの帯とは

長方形ＡＢＣＤの１辺ＣＤをそのまま向かいの辺ＡＢにつけると円筒ができる。また，長方形の１辺ＣＤを180°ねじって辺DCを向かいの辺ＡＢにつけると，メビウスの帯（Mõbius Band, Mõbius Strip）ができる。

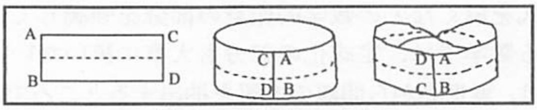


図２　メビウスの帯

ア）メビウスの帯の性質

メビウスの帯は，表裏の区別のない図形である。普通の曲面では，この曲面上をアリがはいまわっても表面に穴をあけてもぐり込まない限り，面の裏側に入り込むことはできない。ところが，メビウス曲面ならば，もとの位置のちょうど裏側に入ることができる[30]。

イ）メビウスの帯の切断

円筒の真ん中（図２の点線の部分）を鋏で切ると，円柱は２つの円筒に分離してしまう。では，メビウスの帯の真ん中を鋏で切っていくとどうなるであろうか。

実際に切ると，輪は２つに離れなくて１つのままである。この現象は帯が紙片を１回ねじって作られていることにポイントがある。

メビウスの帯の真ん中を鋏で切っていくと，もとの２倍の長さの境界をもつ輪形の面となる。簡単に考えると，切断によって，曲面が２つに分裂するように思える。ところが，図３上のように，中央線の両側に２点Ｐ，Ｑがあるとき，点Ｐを中央線に沿って動かし，貼り目ＤＦに達するとＤＦはＡＥと一致するように貼り合わせてあるから，さらに中央線に沿って進めばＰの反対側の点Ｑに達する。したがって，切断面の一方の岸は対岸に接していることがわかり，切断によって，図３下のような境界のある曲面になる[31]。

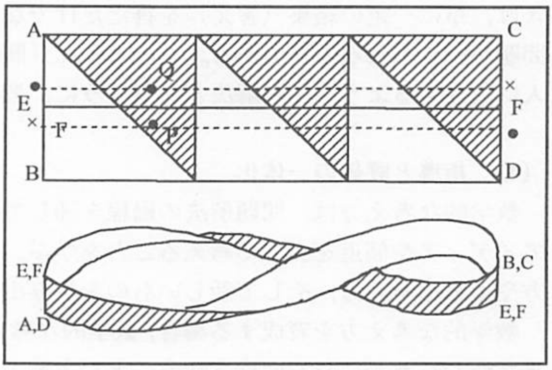


図３　メビウスの帯の切断

(2)　教科書での扱い

教科書『新版中学校数学１（大日本図書）』では，「立体や右の図のように，平面上にない図形を空間図形という。」というように，空間図形の１つの例としてメビウスの帯の写真を載せている[32]。そして空間図形のいろいろな例を見つける活動へと展開する。

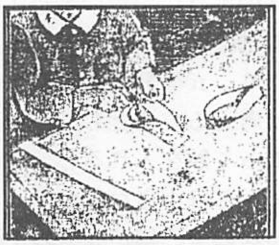

教科書(中学1年)

(3)　先行研究

ア）「カズノホン」におけるメビウスの帯

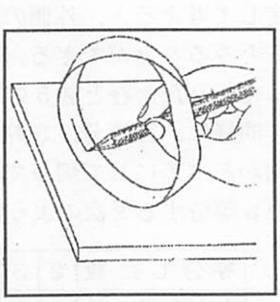
「カズノホン」は，昭和16年に発行された教科書である。その1・2年生の図形部分は，前田隆一氏が中心となって書いた。前田氏は，「論理的な分析をやるには，同時に全体を見通すような，洞察するような働きがなければならない」[33]と述べている。そして，「従来の図形観は固定的である。空間は，単なる図形の置かれている場所ではない。図形は，そこで変化したり，動いたり，いろいろする。図形の位相的とらえ方もある。」[34]という考えで，次のような問題を小学2年生の教科書に載せている[35]。

勇サンハ，ハバ　十八センチノ　細長イ　紙ヲ，ハバ　三センチヅツニ　切リマシタ。イクツニ　切レタデセウ。
切ッタ　紙ヲ　一度　ネジッテ　ワ　ニ　シタラ，オモシロイ形ニナリマシタ。ソノ　ワ　ノ　マン中ニ　ハサミヲ　イレテ　切ッテヰマス。ドンナ　形ニナルデセウ。



カズノホン四　児童用

カズノホン四の教師用には，子供に実際にやらせるように書いてあり，つづいて，「出來上つた環は，暫らく自由に弄ばせてから，これを「勇サン」と同じやうに，眞中に鋏を入れて切開くことに導く。さうして，うまく眞中から切開くために，その準備として，紙片の中央に線を引かせる。紙面の中央に鉛筆を當て，紙をまはしながら前頁の圖のやうに，線をひいて行かせるがよい。さうすると，いつの間にか，書きはじめた箇所の裏側へ出ることに氣づくであろう。これは，兒童にとつて驚異に違ひない。しかし，更に紙をまはしながら，既に引かれた部分の線を裏側からたどつて行くと，遂に書きはじめたところへ戻つて來る。かやうなことは，兒童の興味を呼ぶであらう。」[36]と述べてある。



カズノホン四　教師用

その後，線に沿って鋏で切り開くのであるが，切り開くとどうなるか予想させてから確かめるような注意が書かれている。そして，「兒童が，「二つひねつて環にしたらどうなるか。」などといふやうな研究心を起こすやうであつたら，各自自由に調べたいことをやらせるがよい。」[37]というように書かれている。

これは，今日の課題学習の趣旨と非常に似ている。しかも，小学2年生の教材として取り上げられているところにわが国の伝統的な教育水準の高さを感じると共に，次代の人材を育てようとする情熱が伝わってくる。

イ）飯島康男氏の展開

飯島康男氏は，授業の進め方として，操作や実験を取り入れることを強調する立場から，

実験→仮説→実験→仮説の検証

といった自然科学的方法を体験させる流れをとっている[38]。

大学生に向けて，小学6年生では扱えなかった「ひねり具合」について考える活動を発展的に取り上げているところに特徴がある。

(4) メビウスの帯の教材化

実際に指導する場合には，問題を教材化することが必要になる。指導者は，教材の背景になる数学的な意味を熟知し，ただおもしろいだけではなく，その学習を通して数学的センスや，数学の本質が含まれるように配慮する必要がある[39]。ここでは，メビウスの帯を教材化する上でのポイントについて述べることにする。

ア）メビウスの帯のn等分

メビウスの帯を２等分すると，図３のように，長い帯が１つできる。では，図４の紙片でメビウスの帯を作り，n等分したらどのようになるであろうか。

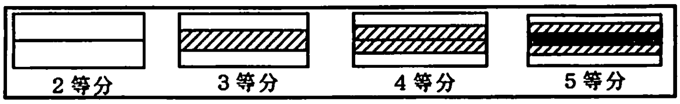


図４　帯のn等分

考える方法として，折りたたんだ形にすると分かりやすい。メビウスの帯の幅を３等分する線に沿って鋏を入れると，図５のように，外側（白）の部分からは大きな輪が１つ，内側（斜線）の部分からは小さな輪が１つできる。ここで，斜線の部分は，もとのメビウスの帯の幅を３等分したものなので，幅が３分の１のメビウスの帯そのものである。

では，外側の部分はどうであろうか。斜線の部分を０と仮定して考えると，外側の部分は，メビウスの帯の２等分と同じとみることができる。つまり，図３下のようになり，工夫して折りたたむと図５のような輪（□になる）ができる。

同様に，４等分，５等分，…と考えていく。このとき，外側からペアにして切っていくとわかりやすい。メビウスの帯をn等分すると次のようになる。

等分した数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
大きな帯の数	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	…
小さな帯の数	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…

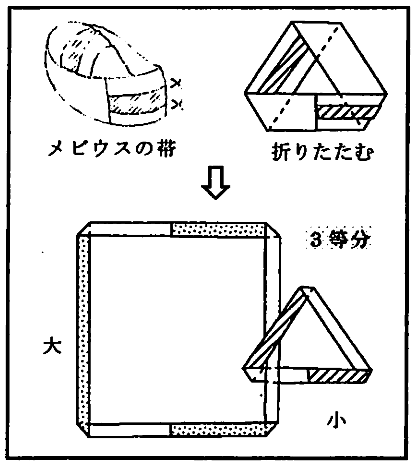


図５　メビウスの帯の３等分

これから，［等分した数］＝［大きな帯の数］×２＋［小さな帯の数］の式を導くことや，nが偶数のときは大きな帯しかできず，nが奇数のときだけに小さな帯ができるというようなことにも気づくであろう。

イ）メビウスの帯のひねり数

メビウスの帯は，１回（半ひねり：180°）ひねったものであるが，これを２回，３回ひねった帯はどうなるであろうか。

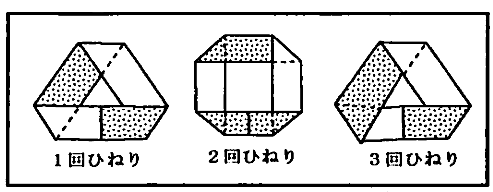


図６　メビウスの帯のひねり数

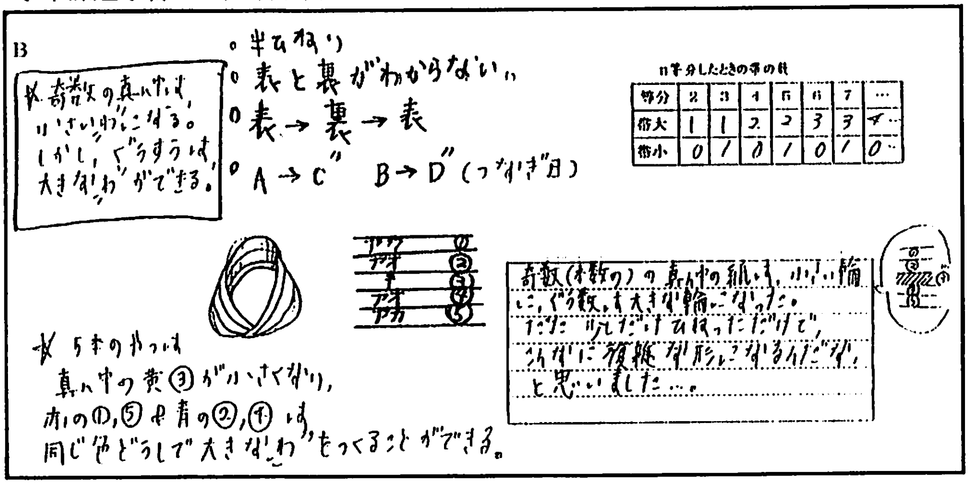
３回ひねりは，１回ひねりと向きは違うが，表裏の区別のない帯になる（図６）。ところが，２回ひねりは，表裏の区別がある。つまり，奇数回ひねった場合は，メビウスの帯になり，偶数回のときには円筒と同じような性質があると類推できる。実際に２等分して確かめるようにすると理解も深まる。さらに，ひねり数と等分数を組み合わせるなど既習事項と関連を図りながら学習を進めたい。

5　メビウスの帯の授業展開 [40]

(1)　課題学習での実践

課題学習のねらいは，子供の主体的な活動を促し数学的な見方や考え方の育成を図ることである。既習内容を総合して問題を解決することを重視している。各領域の内容を総合したり日常の事象に関連付けたりする学習を通して，子供が数学の有用性を感じ，問題解決能力を一層伸ばせるよう，新指導要領では，課題学習が第１学年から位置づけられた。

◇　第１学年課題学習での実践事例



この記録は，中学１年生の教科書に写真だけ載っているメビウスの帯を，発展的に扱ったものである。この授業は，数学的活動ということを目指したものであるが，多様な学習活動が展開できた。メビウスの帯の教材化を図ろうと，他校で授業を実施し，指導案を修正して授業に臨んだ。この記録は，自分の担任する学級で実践したものである。校内研修として授業公開をし，ＶＴＲにも収めた。この子供は，帯の５等分について真ん中③を強調し，記号を用いて表現しており，数学的な考え方を活用している。中学１年生という発達段階を考えると，十分な成果であると考える。

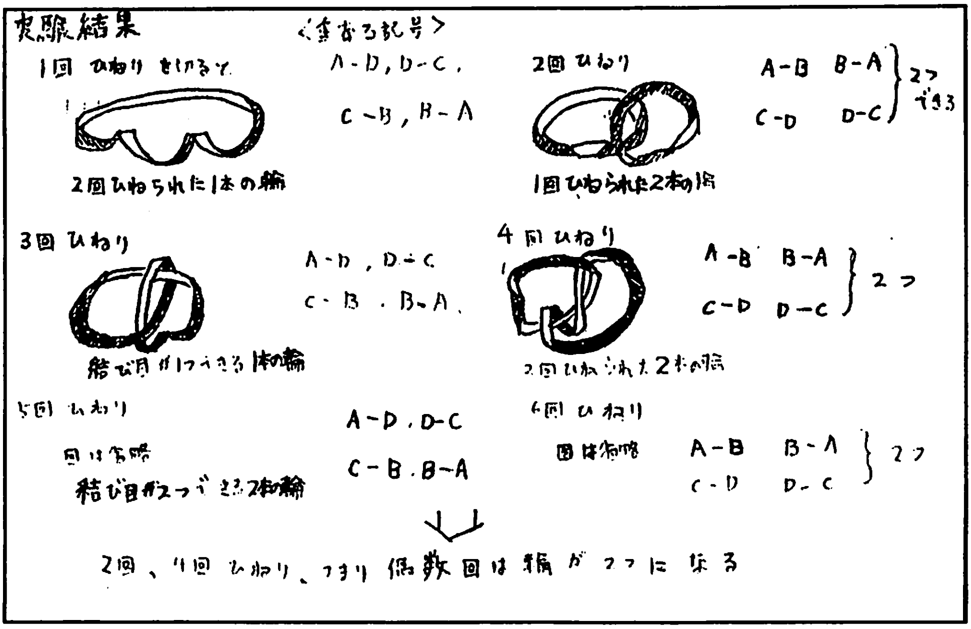
しかし，再度この記録を振り返ってみると，「自ら問いを見いだし」という次元までは至っていないことを反省する。例えば，「ｎ等分したときの帯の数」を予めワークシートに印刷し準備しておいたが，ここは，子供が試行錯誤しながら気づかせたいところであった。

(2)　選択数学での実践

選択教科としての数学は，子供の能力・適性，興味・関心等に応じた適切な学習目標を定め，その目標達成に向けての多様な学習活動を通して，子供のよさを伸ばし教育の一層の充実を図ることがねらいである。今回の改訂における特徴は，全学年を通して，各学校の主体的な判断により，学習をより確かなものにするための補充的な学習，より進んだ内容を含む発展的な学習を含め，一層多様な学習活動ができるようになった。

より進んだ数学の探究を子供自ら行うために，メビウスの帯の展開例について考える。

◇　第３学年選択数学での実践事例



この記録は，授業後に提出されたワークシートの一部である。この子供は，左側に奇数回，右側に偶数回の図を並べて整理している。また，＜重なる記号＞という項目を設定し，Ａ－Ｄ，Ｂ－Ａというように数学的に説明しようとしている。そして，「２回，４回ひねりは，つまり偶数回は輪が２つになる」という自分なりの結論を得ている。

しかも，これに続けて，実験２として，「180°×ｎだけ回転してくっつける。（ｉ）ｎが偶数のとき，（ⅱ）ｎが奇数のとき，どのようになるか」という問題を自分で作り，実験をした。その中で，仮説を立てて，一般項について調べている。そして，「輪の数は実験１と同じように奇数１つ，偶数は２つになった。また，偶数は１つずつひっかかる数が増え，奇数は720°ずつ角度が増える」という結論を得ていた。

また，数え方についても独自の工夫が見られる。「ひねりの数え方」というコラムを設定し，「表裏を数えることは大変なので，ひねられているところで輪をつくり，ホチキスでとめる。そしてその数を数える」というように自分なりの方針を決めて調べようとしている。

このように，「メビウスの帯」は，子供が自ら問いを設定し，数学的探究を続けるような活動ができるし，これまで学んだことが基礎・基本となって探究できる素材である。

学習しての感想に，「私達はグループ活動をしてメビウスの帯について調べました。正直，こんな楽しいものだとは思いませんでした。一人のささいな一言でみんなで謎を解き明かす。」と書いてあった。ここからは３つのことが読みとれる。１つ目は，学ぶことの楽しさを味わっていること。２つ目は，コミュニケーションのよさを生かしていること。３つ目は，メビウスの帯が知的好奇心を起こさせる素材だということである。

「選択教科としての数学」は，数学の学習が進んでいる子供，苦手な子供，いろいろな子供がいる。友達と先生と，時間と空間を共有し，「数学を選んでよかった。学ぶことは楽しい。」と知的充足感が得られるような１時間にしたいものである。

(3)　テクノロジーの活用

自ら問いをもち学ぶ活動をする上で，良質の情報に出会えるかどうかは，その探究活動の質をも左右してしまう。インターネットは，情報の宝庫であり，貴重な情報が公開されている。

例えば，「 http://evariste. appmath. osaka-wu. ac. jp/~takashiw/j-ma. htm」には，次のようなマテマティカのプログラムが掲載されている。

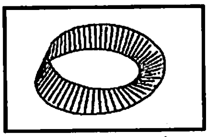


図7　マテマティカ

```
In[1]:= <<Graphics`ParametricPlot3D`
In[2]:= rotate[t_]:={{Cos[t], Sin[t], 0}, {Sin[t], Cos[t], 0}, {0, 0, 1}};
In[3]:= circ[t_]:={4, 0, 0}+s{Cos[t], 0, Sin[t]};
In[4]:= ParametricPlot3D[evaluate[rotate[theta]. circ[theta/2], {s, -1, 1, 2},
        {theta, 0, 2Pi, Pi/30}], Boxed ->False, ViewPoint ->{2. 7, -1. 7, Axes ->None]
```

これを実行すると図７が描かれる。Sin[t]や Cos[t]などは高等学校の内容であるが，今回の改訂では発展的に扱えるようになっている。このプログラムを見れば，中学１年で学習する座標に似ているし，circ[t_]は，円を描くこと，Piはπというように見当がつけられるであろう。

このように，インターネットのサイトを開くと，紙と鉛筆だけの閉じた学習から，開かれた学習，探究へと進むことができるし，総合的な学習もできる可能性がある。

テクノロジーの活用は，新しい知の在り方を考える上で重要な要素である。知は個人の中にもあるし，広く社会に存在しているものである。そして，それを活用するのは人間であり，思考するのは自分自身である。活動と思考が一体となって考える力が育つのである。

6　おわりに

ペリー（Perry, J）は，1901年のグラスゴーでの会議で，「みずから教育するように，子供を指導せよ。(… *lead him to educate himself.*)」[4]と情熱を傾けて演説した。これがわが国の数理思想を中核とする緑色表紙教科書の編成につながり，中学校の要目改正にまで及んだ。

数学的な考え方は，わが国の数学教育において中心的課題として研究されてきたものである。それは，単なる活動主義ではなく，数理思想といわれる高次目標を含むものである。数学は，簡単な四則ができればいいという考えもあるが，数学を学ぶことによって身に付く思考力について改めて注目する必要がある。わが国の豊かで安定した秩序と生活が保障され，より一層の発展を願うとき，数学教育の充実が鍵になるであろう。そのためには，数学の本質に迫れるような授業になるよう意識して取り組むことが大事であると考える。

引用・参考文献

１)文部省『中学校学習指導要領（平成10年12月）解説－総則編－』東京書籍, 1999, p. 3
２)21世紀を展望した我が国の教育の在り方について（中央教育審議会第一次，第二次答申）／
The Model for Japanese education in the perspective of the 21st Century (2nd Report), 1997
３)橋爪貞夫訳「危機に立つ国家」，橋爪貞夫『2000年のアメリカー教育戦略』黎明書房, 1992
４)M. J. アドラー, 佐藤三郎訳『教育改革宣言』教育開発研究所, 1984
５)E. D. ハーシュ, 中村保男訳『教養が国をつくる』ＴＢＳブリタニカ, 1989
６)日数教「第３回国際数学・理科教育調査を生かす道はあるか」日数教会誌, Vol. 79, No. 7, 1997
７)丹羽敏雄『数学は世界を解明できるか』中公新書, 1999, pp. ⅰ-ⅳ

8）Kline, M. “Mathematics in Western Culture” Oxford University Press, 1953, 1970版 pp. 3-12
9）佐藤瑛一「既習事項の活用について」教大研研究資料, Vol. 36, No. 3, 1996. 7, p. 1
10）古藤怜「自ら学ぶ意欲を育てる指導」教大研研究資料, Vol. 38, No. 1, 1998. 2, p. 7
11）Freudenthal, H. ‘Why to teach Mathematics so as to be Useful’ E. S. M., Vol. 1, 1968, p. 7
12）文部省『中学校学習指導要領　解説－数学編－』大阪書籍, 1999
13）根本博，教大研茨城水戸地区授業研究会（下妻東部中, 1999. 1. 16）での資料
14）高久清吉「「自ら学び自ら考える力」を育てる方法原理」教育実践研究第３号，1999. 3
15）塩野直道『数学教育論』新興出版社啓林館1970, p. 43
16），17）數學教科調査委員會『數學教育最近の傾向』目黒書店，昭和11年, pp. 25-38／
“Divisional Reports on Present Tendencies in the Development of Mathematical Teaching in Japan”
Tokyo University of Literature and Science, June, 1936, pp. 33-52
18）中島健三『数学的な考え方と問題解決　第１巻』金子書房, 1985
19）和田義信「数学的な考え方」教育総合研究所, 算数と数学, Vol. 17, No. 174, 1966. 7, p. 33
20）片桐重男『数学的な考え方・態度とその指導１　２』明治図書, 1988
21）赤攝也「数学的な考え方とは何か」初等教育研究会, 教育研究, 1966. 5, p. p24-25
22）Krulik, S., Reys, R. E. “Problem Solving in School Mathematics” NCTM1980YB
23）Polya, G. “How to Solve it” Prinston University Press, 1945／
柿内賢信訳『いかにして問題をとくか』丸善，1954
24）Polya, G. “Mathematics and Plausible Reasoning Vol. 1 Induction and Analogy in Mathematics”
Prinston University Press, 1954／
柴垣和三訳『数学における発見はいかになされるか 第１巻 帰納と類比』丸善, 1959
25）三輪辰郎「数学教育におけるモデル化についての一考察」筑波数学教育研究第2号, 1983. 3, p. 120
26）Halmos, P. R. ‘The Heart of Mathematics’ The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 7, 1980
27）Hilbert, D.，一松信訳『ヒルベルト数学の問題』共立出版社, 1969, p. 10
28）Chambers, D. L. ‘Integrating Assessment and Instruction’ NCTM1993YB, p. 25
29）Krulik, S., Rundick, J. A. ‘Teaching Problem Solving to Preservice Teachers’ A. T., Feb. 1982
30）横田一郎『やさしい位相幾何学の話』現代数学社, 1974, pp12-13
31）中村勝彦『トポロジー』共立出版, 昭和41年, p31
32）赤攝也，井上義夫ほか『新版中学数学１』大日本図書, 平成10年, p. 144
33, 34）前田隆一『算数教育論－図形指導を中心として－』金子書房1979, pp. 188-190
35）文部省『カズノホン四　第二學年後期用』東京書籍, 1946, p. 28
36），37）文部省『カズノホン四　教師用』文部省, 昭和16年, pp. 65-67
38）飯島康男『算数・数学教育実践的研究のすすめ方・まとめ方』東洋館, 平成３年, pp. 33-39
39）平岡忠「望ましい教材開発」教大研研究資料, Vol. 36, No. 5, pp. 33-45
40）小池浩一「図形についての豊かな感覚（ﾒﾋﾞｳｽの帯）」教大研ﾆｭｰｽ, Vol. 38, No. 3, 1999, pp. 23-49
41）Perry, J. ‘The Teaching of Mathematics’ Educational Review, Vol. ＸＸⅢ, 1902, p. 165
42）能田伸彦『算数・数学科オープン アプローチによる指導の研究』東洋館, 平成３年
43）根本博『中学校新教育課程の解説　数学』第一法規, 平成11年